107年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及 107年特種考試交通事業鐵路人員考試試題

考試別：鐵路人員考試
等　　別：高員三級考試
類科別：電力工程、電子工程
科　　目：工程數學
考試時間：2小時　　　　座號：＿＿＿＿＿＿

※注意：禁止使用電子計算器。

甲、申論題部分：（50分）
㈠不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在申論試卷上，於本試題上作答者，不予計分。
㈡請以藍、黑色鋼筆或原子筆在申論試卷上作答。
㈢本科目除專門名詞或數理公式外，應使用本國文字作答。

一、若線性轉換（linear transformation）矩陣 $T: R^2 \to R^2$ 的作用是將在 R^2 上的向量逆時針旋轉角度 θ，試以詳細計算過程求出：
㈠此線性轉換矩陣。（7分）
㈡順時針旋轉角度 θ 的線性轉換矩陣。（3分）

二、假設隨機變數 X 的累積分布函數（cumulative distribution function）可以表示成

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x<0 \\ \dfrac{x^2}{7} & \text{if } 0\le x<1 \\ \dfrac{2x}{7}-\dfrac{1}{7} & \text{if } 1\le x<3 \\ \dfrac{5x}{7}-\dfrac{x^2}{14}-\dfrac{11}{14} & \text{if } 3\le x<5 \\ 1.0 & \text{if } 5\le x \end{cases}$$

㈠試求出隨機變數 X 的機率密度函數（probability density function）$f(x)$ 為何？（5分）
㈡試求出 $P(1\le X\le 4)=$？（5分）

三、試求複變函數 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 對 $z_0=0$ 展開的所有泰勒級數（Taylor series）及羅倫級數（Laurent series）。（15分）

四、利用 Frobenius 級數 $y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m$ 的方法求解微分方程式 $(x^2-x)y''-xy'+y=0$。（15分）

乙、測驗題部分：（50 分） 代號：4704

㈠本測驗試題為單一選擇題，請選出一個正確或最適當的答案，複選作答者，該題不予計分。
㈡共 20 題，每題 2.5 分，須用 2B 鉛筆在試卡上依題號清楚劃記，於本試題或申論試卷上作答者，不予計分。

1 向量 u =（-1,4,2,3）於向量 v =（-1,0,2,2）之投影（projection）的長度為何？

(A) $\frac{11}{3}$ (B) $\frac{11}{9}$ (C) $\frac{11}{\sqrt{30}}$ (D) $\frac{11}{30}$

2 下為敘述何者恆真？

(A) V 為向量空間（vector space），W 是 V 的子集合（subset），則 W 是 V 的子空間（subspace）

(B)空集合為任意一向量空間的子空間

(C) V 為非零向量空間，則 V 包含一子空間 W 且 $W \neq V$

(D) V 的任意二個子集合的交集（intersection）仍然是 V 的子空間

3 試求點（2,0,0）到平面 $x + 2y + 2z = 0$ 的距離為何？

(A)1 (B)2 (C) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\frac{2}{3}$

4 給定三個 n × n 之可逆矩陣 A、 B、 C，下列敘述何者錯誤？

(A) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$

(B) $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$

(C)若矩陣 A 是正交矩陣（orthogonal matrix），則矩陣 A 的反矩陣是 A^T

(D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

5 假設矩陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，且 A 的特徵值（eigenvalues）$\lambda_1 = 1$、$\lambda_2 = 5$，其對應的特徵向量（eigenvectors）分別為 $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$，則 $a + b + c + d =$？

(A)6 (B)10 (C)15 (D)20

6 下列矩陣何者為非正交矩陣（non-orthogonal matrix）？

(A) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

7 令 $e^z = 2 + i\,3$，則：

(A) $z = \ln(2) + i\ln(3)$

(B) $z = \ln(3) + i\ln(2)$

(C) $z = \frac{1}{2}\ln(9) + i\arctan(\frac{2}{3})$

(D) $z = \frac{1}{2}\ln(13) + i\arctan(\frac{3}{2})$

8 已知 $\{z_n = x_n + i\,y_n\}$ 為一複數數列，其中 x_n 及 y_n 分別代表 z_n 的實部及虛部，則下列敘述何者錯誤？

(A)若複數數列 $\{z_n\}$ 為發散，則數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 至少其中之一為發散

(B)若數列 $\{x_n\}$ 及 $\{y_n\}$ 其中之一為收斂，則複數數列 $\{z_n\}$ 可為收斂

(C)若 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$ ，則 $\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b$

(D)若 $\lim_{n\to\infty} z_n = a + i\,b$ ，則 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 及 $\lim_{n\to\infty} y_n = b$

9 求 $f(z) = \dfrac{\tan^2(z)}{z^2 \sin(z-\pi)\cos^3(z-\pi)}$ 在零點的極點次數（pole order）：

(A)0 (B)1 (C)2 (D)4

10 已知微分方程式 $y'' + \alpha\,y' + \beta\,y = 0$ 的通解為 $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}$，試求 α、β 之值，並判定下列何者正確？（題中 α 、 β 、 c_1 、 c_2 為常數）

(A) $\alpha + \beta$ =15 (B) $\alpha + \beta$ = -15 (C) $\alpha + \beta$ = 6 (D) $\alpha + \beta$ = -6

11 下列何者為 $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$ 之解？其中 a、b 為常數， $y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$ ， $y'' \equiv \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ 。

(A) $ax^3 + bx^3 \ln(x),\ x > 0$

(B) $ae^{3x} + bxe^{3x},\ x > 0$

(C) $e^{(5/2)x}[a\cos\sqrt{11}x + b\sin\sqrt{11}x],\ x > 0$

(D) $e^{-(5/2)x}[a\cos\sqrt{11}x + b\sin\sqrt{11}x],\ x > 0$

12 根據微分方程式 $(\sin x\cos x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ 及其初始條件 $y(0)=4$，請問下列何者為 y^2 之計算結果？

(A) $\dfrac{2-\cos x}{1-x}$ (B) $\dfrac{4-\sin x}{1-x}$ (C) $\dfrac{8-\cos^2 x}{1-x^2}$ (D) $\dfrac{16-\sin^2 x}{1-x^2}$

13 某一函數 $f(t)$ 的拉氏轉換（Laplace Transform）為 $F(s)=\dfrac{3s-1}{s^2-6s+25}$ ，則下列何者正確？

(A) $f(0^+)=2$　(B) $f(0^+)=12$　(C) $f'(0^+)=17$　(D) $f'(0^+)=21$

14 假設聯立微分方程式 $\begin{cases} y'_1=-2y_1+3y_2\ , y_1(0)=4 \\ y'_2=4y_1-y_2\ , \quad y_2(0)=3 \end{cases}$（其中 $y'_1=\dfrac{dy_1}{dt},\ y'_2=\dfrac{dy_2}{dt}$）的解 $y_2(t)=ae^{2t}+be^{-5t}$ ，a、b 是常數，求 a+2b =？

(A)-2　(B)2　(C)3　(D)5

15 假設微分方程式 $y''-xy'+e^{2x}y=8$，其中 $y(0)=1$ 且 $y'(0)=2$，若 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 為此微分方程式之級數解，求 $a_1+a_2+a_3$ 的值為何？

(A) $\dfrac{7}{2}$　(B) $\dfrac{13}{2}$　(C) $\dfrac{31}{6}$　(D) $\dfrac{37}{6}$

16 考慮函數 $f(x)=1+\cos\pi x$ ，當 $x\notin[-1,1]$ 時，$f(x)=0$ ，求此函數之傅立葉轉換（Fourier transform）？

(A) $\sin\omega\left(\dfrac{2}{\omega}+\dfrac{1}{\pi+\omega}-\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$　(B) $\cos\omega\left(\dfrac{2}{\omega}+\dfrac{1}{\pi+\omega}-\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$

(C) $\sin\omega\left(\dfrac{2}{\omega}-\dfrac{1}{\pi+\omega}+\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$　(D) $\cos\omega\left(\dfrac{2}{\omega}-\dfrac{1}{\pi+\omega}+\dfrac{1}{\pi-\omega}\right)$

17 下列何者為 $x[n]=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|n-1|}$ 的傅立葉轉換 $X(e^{j\omega})$ ？

(A) $\dfrac{0.75e^{-j\omega}}{1.25-\cos\omega}$　(B) $\dfrac{0.5e^{-j\omega}}{1.5-\sin\omega}$　(C) $\dfrac{0.5e^{-j\omega}}{1.25+\cos\omega}$　(D) $\dfrac{0.75e^{-j\omega}}{1.5+\sin\omega}$

18 $x\in\Re$ 隨機均勻從 [-1,1] 區間選出，令事件 $A=\{x>0.75\}$， $B=\{|x-0.5|<1\}$，求 $P[A\cup B]\cdot P[A\cap B]=$？

(A) $\dfrac{3}{32}$　(B) $\dfrac{5}{16}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{7}{8}$

19 投擲一顆公平的骰子並記錄獲得點數，再投擲另一顆公平的骰子且記錄獲得點數，試求第二次點數大於第一次點數之機率：

(A) $\dfrac{1}{3}$　(B) $\dfrac{5}{12}$　(C) $\dfrac{1}{2}$　(D) $\dfrac{11}{18}$

20 設 X 為一隨機變數，它在每一可能值 -1、0、1 的機率分別為 $P\{X=-1\}=0.2$，$P\{X=0\}=0.5$，$P\{X=1\}=0.3$，求 $E[X^2]$：

(A)0.2　(B)0.3　(C)0.5　(D)1

測驗式試題標準答案

考試名稱：１０７年公務人員特種考試警察人員、一般警察人員考試及１０７年特種考試交通事業鐵路人員考試

類科名稱：電力工程、電子工程

科目名稱：工程數學（試題代號：4704）

單選題數：20題　單選每題配分：2.50分

複選題數：　複選每題配分：

標準答案：

題號	第1題	第2題	第3題	第4題	第5題	第6題	第7題	第8題	第9題	第10題
答案	A	C	D	D	B	B	D	B	B	A

題號	第11題	第12題	第13題	第14題	第15題	第16題	第17題	第18題	第19題	第20題
答案	A	D	C	B	C	C	A	A	B	C

題號	第21題	第22題	第23題	第24題	第25題	第26題	第27題	第28題	第29題	第30題
答案										

題號	第31題	第32題	第33題	第34題	第35題	第36題	第37題	第38題	第39題	第40題
答案										

題號	第41題	第42題	第43題	第44題	第45題	第46題	第47題	第48題	第49題	第50題
答案										

題號	第51題	第52題	第53題	第54題	第55題	第56題	第57題	第58題	第59題	第60題
答案										

題號	第61題	第62題	第63題	第64題	第65題	第66題	第67題	第68題	第69題	第70題
答案										

題號	第71題	第72題	第73題	第74題	第75題	第76題	第77題	第78題	第79題	第80題
答案										

題號	第81題	第82題	第83題	第84題	第85題	第86題	第87題	第88題	第89題	第90題
答案										

題號	第91題	第92題	第93題	第94題	第95題	第96題	第97題	第98題	第99題	第100題
答案										

備　　註：